Posición relativa de una recta y un plano

La posición relativa de una un plano y una recta la determinaremos mediante la ecuación general del plano y las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D2=0 \end{cases}$$

$$\pi: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

Consideraremos las matrices M, matriz de los coeficientes y M', matriz ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M'=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

- Si $\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}(M')=3$, el sistema es compatible determinado. La recta y el plano son secantes.
- Si $\operatorname{rg}(M)=2$ y $\operatorname{rg}(M')=3$, el sistema es incompatible. No hay puntos en común. La recta y el plano son paralelos.
- Si $\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}(M')=2$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son infinitas. La recta está contenida en el plano.

Resumen:

Posición relativa	Ecuaciones de la recta y el plano	Rango (M)	Rango (M')
Recta contenida en el plano Sistema compatible indeterminado	$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D2=0 \end{cases}$	2	2
Recta y plano paralelos Sistema incompatible	$\pi: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$	2	3
Recta y plano secantes Sistema compatible determinado	$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ $M'=\left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$	3	3

Posiciones relativas de dos rectas

Rectas en forma implícita.

Conocidas las ecuaciones implícitas de las dos rectas, su posición relativa viene determinada por la discusión del sistema de ecuaciones que forman:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Para ello, estudiaremos el rango de las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{array}\right)$$

- Si $rg(M)=3$ y $rg(M')=4 \Rightarrow$ Se cruzan.
- Si $rg(M)=3$ y $rg(M')=3 \Rightarrow$ Se cortan.
- Si $rg(M)=2$ y $rg(M')=3 \Rightarrow$ Son paralelas.
- Si $rg(M)=2$ y $rg(M')=2 \Rightarrow$ Son coincidentes.

Resumen:

Posición relativa	Ecuaciones de las rectas	Rango (M)	Rango (M')
Se cruzan Sistema incompatible	$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$ $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$ y $M' = \left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{array}\right)$	3	4
Se cortan Sistema compatible determinado		3	3
Paralelas Sistema incompatible		2	3
Coincidentes Sistema compatible indeterminado		2	2

Posición relativa de dos planos

Para estudiar la posición relativa que pueden presentar dos planos emplearemos sus ecuaciones generales:

$\pi : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi' : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Para hallar las posiciones relativas consideradermos las matrices M, matriz de los coeficientes y la matriz M', matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$$

- Si $rg(M) = rg(M') = 1$, los planos son coincidentes.

  Equivale a: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

- Si $rg(M) = 1$ y $rg(M') = 2$, los planos son paralelos.

  Equivale a: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

- Si $rg(M) = rg(M') = 2$, los planos son secantes.

  Equivale a: $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ ó $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ ó $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

Resumen:

Posición relativa	Ecuaciones de los planos	Rango (M)	Rango (M')	Proporcionalidad
Planos secantes Sistema compatible determinado	$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	2	2	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
Planos paralelos Sistema incompatible	$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$	1	2	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$
Planos coincidentes Sistema compatible indeterminado	$M' = \left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$	1	1	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$